OLENA SHMAHALO / QUANTA MAGAZINE

SERIE

Quantenfeldtheorien

Teil 1: November 2021
Das Fundament der Physik
Kevin Hartnett

Teil 2: Dezember 2021
Stachelige Oberflächen für die Schwerkraft
Charlie Wood

Teil 3: Januar 2022
Die Grundkräfte der Welt
Manon Bischoff

OLENA SHMAHALO / QUANTA MAGAZINE

QUANTENGRAVITATION

STACHELIGE OBERFLÄCHEN FÜR DIE SCHWERKRAFT

Bereits vor vier Jahrzehnten berechneten Physiker ein Modell der Quantengravitation in zwei Dimensionen – doch aus mathematischer Sicht war das Resultat fragwürdig. Ein neuer Beweis bestätigt nun die Ergebnisse und ermöglicht es zudem, sie in der Wahrscheinlichkeitstheorie zu nutzen.

Charlie Wood ist Physiker und Wissenschaftsjournalist in New York.

spektrum.de/artikel/1937236

UNZÄHLIGE GEOMETRIEN
Betrachtet man die Schwerkraft quantenmechanisch, kann die Raumzeit viele verschiedene Formen annehemen.

Die moderne Physik beruht auf so genannten Quantenfeldtheorien (QFT): Demnach durchziehen wogende Quantenfelder unsere Raumzeit und erzeugen die bekannten Elementarteilchen und Grundkräfte, indem sie miteinander wechselwirken. Anders als klassische Felder wie das Erdmagnetfeld, das überall auf der Welt einen eindeutigen Zahlenwert annimmt, sind die quantenphysikalischen Versionen komplizierter: Möchte man etwa den Aufenthaltsort eines Elektrons bestimmen, erhält man eine Art Matrix mit unendlich vielen Zeilen und Spalten. Denn das Teilchen besitzt an jeder Stelle im Raum eine gewisse Aufenthaltswahrscheinlichkeit – genau das drückt das Quantenfeld aus.

Neben den zahlreichen Vorteilen, die der Formalismus bietet (immerhin gilt die als Standardmodell bekannte Quantenfeldtheorie als die erfolgreichste Theorie aller Zeiten), birgt er auch zwei entscheidende Probleme: Zum einen lassen sich die zugehörigen Gleichungen, welche die Quantensysteme beschreiben, ohne starke Vereinfachungen meist nicht lösen. Zum anderen konnte man die Schwerkraft als einzige der vier Grundkräfte bisher nicht durch eine Quantenfeldtheorie ausdrücken.

Doch 1981 gelang dem Quantenphysiker Alexander Polyakov, heute an der Princeton University, eine erstaunliche Leistung: Er entwickelte ein Modell für ein zweidimensionales Universum – und konnte die zu Grunde liegenden Formeln exakt berechnen, indem er Wahrscheinlichkeitstheorie und theoretische Physik miteinander verknüpfte. Auch wenn das System weit davon entfernt ist, unsere Welt realistisch zu beschreiben, stellt es ein beeindruckendes Resultat dar.

Dennoch behagte das Ergebnis Mathematikerinnen und Mathematikern nicht, denn die Lösung war ein Zufallsfund. Es gab keine Erklärung, wie und warum die Methode funktionierte. Damit ließ sie sich nicht ohne Weiteres auf andere Beispiele übertragen. Doch nun, fast vier Jahrzehnte später, ist es Vincent Vargas von der École normale supérieure in Paris, Rémi Rhodes von der Université Aix-Marseille, Antti Kupiainen von der Universität Helsinki, François David vom Institut de Physique Théorique in Saclay und Colin Guillarmou von der Université Paris-Saclay endlich gelungen, eine solide Basis für Polyakovs Resultate zu schaffen – und sie damit auch für andere nutzbar zu machen.

Die Arbeiten stellen einen Meilenstein dar, da sie ein Beispiel für eine Quantenfeldtheorie liefern, die sich vollständig berechnen lässt, ohne auf Näherungsverfahren zurückzugreifen. Das wohl erfolgreichste und berühmteste Beispiel für eine QFT ist das Standardmodell, das bisher jeder experimentellen Überprüfung standgehalten hat – und das mit erstaunlicher Präzision. Darüber hinaus existieren weitere QFT, die verschiedenen Zwecken dienen. Einige beschreiben wie das Standardmodell reale Teilchen, die sich durch ein vierdimensionales Universums bewegen; andere modellieren hingegen exotische Partikel in seltsamen Umgebungen: von zweidimensionalen Ebenen bis zu sechsdimensionalen Überwelten. Physiker hoffen, durch die exotischen Systeme Erkenntnisse zu gewinnen, die sich auf unsere Welt übertragen lassen.

Die Liouville-Feldtheorie, der sich Polyakov verschrieb, ist ein Beispiel dafür. Das dazugehörige Feld beruht auf einer Bewegungsgleichung, die der französischen Mathematiker Joseph Liouville im 19. Jahrhundert entwickelte. Aus der Gleichung lassen sich zweidimensionale Zufallsflächen erzeugen, ähnlich einer Kugel, wobei die Höhe jedes Punkts darauf einen zufälligen Wert annimmt. Damit ähnelt das Konstrukt einem Seeigel mit Spitzen, die teilweise bis ins Unendliche ragen. Polyakov bemerkte, dass sich diese chaotische Topografie nutzen lässt, um die Gravitation in einem zweidimensionalen Universum quantenphysikalisch zu beschreiben.

Klassisch auf der einen, quantenmechanisch auf der anderen Seite

Um das zu verstehen, hilft das Grundprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie. Albert Einstein erkannte, dass sich die Schwerkraft als geometrisches Problem interpretieren lässt: Masse krümmt die Raumzeit, wobei diese wiederum die Bewegung der Materie steuert. Einsteins Theorie liefert eine Gleichung, welche die wechselseitige Beziehung beschreibt. Allerdings führt das zu Schwierigkeiten: Während der Materieteil der Formel den Gesetzen der Quantenphysik gehorcht, folgt die Raumzeit einer klassischen Beschreibung. Daher sind Physikerinnen und Physiker bestrebt, beide Konzepte zu vereinen und eine Quantentheorie der Gravitation zu formulieren.

Möchte man diese allgemeine Relativitätstheorie durch eine QFT ausdrücken, landet man früher oder später bei einer Überlagerung unendlich vieler verschiedener Raumzeitgeometrien. Das ist ein Hauptmerkmal der Quantenphysik: Denn vor einer Messung befinden sich quantenmechanische Objekte in überlagerten Zuständen. Für Berechnungen einer Quantengravitationstheorie müsste man daher alle möglichen Formen berücksichtigen, die der Kosmos annehmen könnte – so wie man in der Quantenmechanik die unendlich vielen Aufenthaltsorte miteinbezieht, an denen sich ein Elektron befinden kann.

Fachleute erkannten jedoch, dass man mit Hilfe der Liouville-Feldtheorie alle Erscheinungsformen einer kugelförmigen Raumzeit in zwei Dimensionen zu einem einzigen Objekt zusammenfassen kann. Sie gibt Physikern das Mittel zur Hand, um die Krümmung – und damit die Schwerkraft – auf einer beliebigen zweidimensionalen Oberfläche zu bestimmen. »Quantengravitation basiert im Grunde auf zufälliger Geometrie. Denn Quanten bedeuten Zufall, und Gravitation entspricht Geometrie«, so der Mathematiker Xin Sun von der University of Pennsylvania.

Forscherinnen und Forscher hatten also eine geeignete Formulierung für eine vereinheitlichte Theorie in zwei Dimensionen gefunden. Nun suchten sie aber nach Möglichkeiten, die Gleichungen, die das Modell liefert, zu lösen. Eine Quantenfeldtheorie zu lösen bedeutet, so genannte Korrelationsfunktionen herzuleiten. Denn diese beschreiben, wie eine Messung des zu Grunde liegenden

AUF EINEN BLICK
EINE ZWEIDIMENSIONALE RAUMZEIT

1. Eines der Kernmerkmale der Quantenmechanik ist, dass Teilchen überlagerte Zustände haben können, das heißt, sie können sich beispielsweise an mehrere Orten zugleich befinden.

2. Da die Schwerkraft gemäß Einsteins Relativitätstheorie der Krümmung der Raumzeit entspricht, muss man für eine quantenphysikalische Formulierung unzählige mögliche Raumzeitgeometrien beachten.

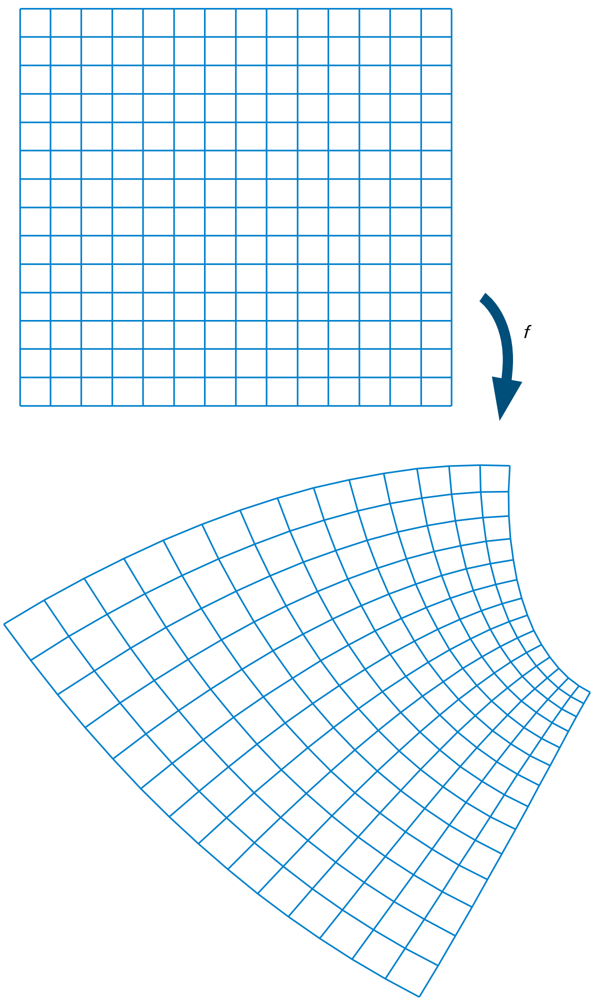
3. Die damit einhergehenden Probleme haben bisher eine erfolgreiche Formulierung eine Quantengravitation verhindert. Doch in zwei Dimensionen gibt es nun eine Lösung.

Felds an einem Punkt eine Messung an einem anderen Ort beeinflusst. Erst dann lassen sich mit Hilfe der Theorie messbare Vorhersagen treffen.

Um die entsprechenden Korrelationsfunktionen zu finden, nutzte Polyakov zwei verschiedene Methoden: Er begann mit einem so genannten Feynman-Pfadintegral und entwickelte schließlich eine Technik, die als Bootstrap bekannt ist. Beide Ansätze erwiesen sich als unvollständig, bis Mathematiker sie in einer präziseren Formulierung vereinten.

Der berühmte US-amerikanische Quantenphysiker Richard Feynman erfand in den 1940er Jahren eine Möglichkeit, mit den unendlich vielen Formen umzugehen, die ein Quantenfeld annehmen kann. Er schlug vor, alle Konfigurationen gewichtet mit ihrer entsprechenden Wahrscheinlichkeit zu summieren – also so etwas wie einen Durchschnitt zu berechnen. Diese elegante Idee liefert jedoch nur für ausgewählte Situationen konkrete Antworten. Kein bekanntes mathematisches Verfahren kann eine

KONFORME SYMMETRIE Eine konforme Transformation ist stets winkelerhaltend. Sie setzt sich aus Drehungen, Skalenänderungen und Translationen zusammen.



OLEG ALEXANDROV (COMMONS.WIKIMEDIA.ORG/WIKI/FILE:CONFORMAL_MAP.SVG) / PUBLIC DOMAIN; BEARBEITUNG: SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

unendliche Anzahl von Objekten, welche die gesamte Raumzeit abdecken, sinnvoll mitteln.

Leider können Physiker die Methode nur für die langweiligsten Fälle nutzen: freie Felder, die nicht mit anderen oder sich selbst wechselwirken. Wenn die Wechselwirkungen schwach ausfallen, kann man mit einem freien Modell starten und nach und nach die zusätzlichen Terme hinzufügen. Ein weiterer Vorteil der eleganten Methode ist, dass sie sich grafisch darstellen lässt. Man kann einen Prozess, den man mathematisch beschreiben möchte, etwa die Streuung zweier Elektronen, in einer Skizze aufzeichnen. Die einzelnen Linien und Punkte stehen dann für Formeln, die man nach gewissen Regeln zusammenfügt. So kann man komplizierte Gleichungen kompakt in anschauliche Zeichnungen verwandeln und diese auswerten.

In Polyakovs Fall funktionierte das allerdings nicht. Denn das Liouville-Feld wechselwirkt zu stark mit sich selbst. Es ist nicht möglich, mit einem freien Zustand zu starten und kleine Störungen dessen zu betrachten. Deshalb entwickelte der Physiker zusammen mit seinen Kollegen Alexander Belavin und Alexander Zamolodchikov 1984 eine Technik namens Bootstrap – eine Art Leiter, die schrittweise zu den Korrelationsfunktionen führt.

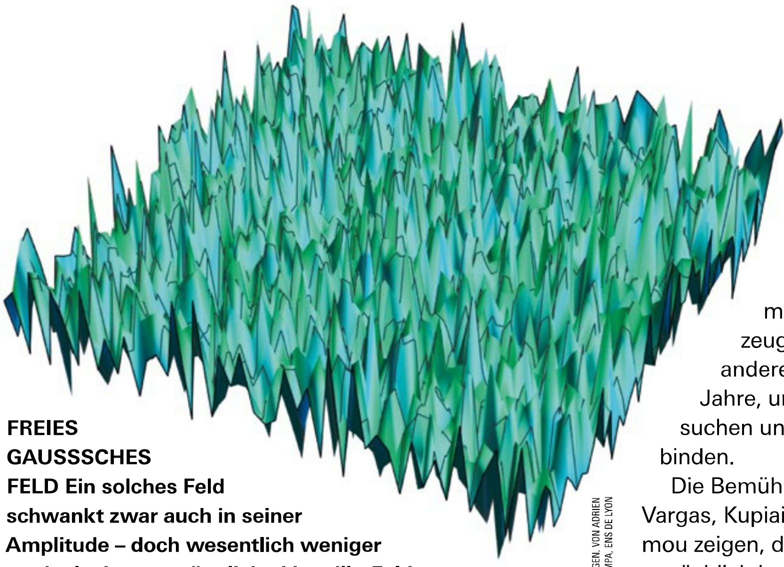
Dafür startet man mit einer Funktion, welche die Korrelationen zwischen drei Messpunkten eines Felds ausdrückt. Die »Dreipunkt-Korrelationsfunktion« bildet zusammen mit zusätzlichen Informationen über die Energien, die ein Teilchen annehmen kann, die unterste Sprosse der Bootstrap-Leiter. Von dort klettert man schrittweise höher: Mit der Drei-Punkt-Funktion lässt sich die Vier-Punkt-Funktion konstruieren, und diese führt wiederum zur Fünf-Punkt-Funktion und so weiter.

Möglich wird das Ganze durch einen bestimmten Satz von Symmetrien, welchen die reale Raumzeit zwar nicht besitzt, aber viele physikalische Systeme nahe einem Phasenübergang aufweisen: eine so genannte konforme Symmetrie. Sie besagt, dass ein System seine wesentlichen Eigenschaften nicht ändert, wenn man es gedreht betrachtet, in eine Richtung verschiebt oder hinein- beziehungsweise hinauszoomt. Die Liouville-Theorie verfügt über solche Symmetrien, unser Universum hingegen nicht. Abhängig von der Skala, auf der man es betrachtet, erscheint es beispielsweise bezüglich der Verteilung der Materie extrem homogen oder inhomogen.

Den richtigen Start finden

Auch wenn das Bootstrap-Verfahren äußerst effektiv ist, um alle Korrelationsfunktionen eines Systems mit konformer Symmetrie zu berechnen, erweist es sich als nutzlos, wenn man die Dreipunkt-Korrelationsfunktion nicht kennt. Mit der von ihnen entwickelten Methode konnten Polyakov, Belavin und Zamolodchikov eine Reihe einfacher Quantenfeldtheorien lösen – doch das Liouville-Feld entzog sich allen Versuchen.

In den 1990er Jahren gelang es den Wissenschaftlern Harald Dorn, Hans-Jörg Otto, Alexander und Alexei Zamolodchikov (kurz: DOZZ) schließlich, eine geeignete Dreipunkt-Korrelationsfunktion zu finden, die das Liouville-Feld und damit eine zweidimensionale Quantengravitation



FREIES GAUSSSCHES FELD Ein solches Feld schwankt zwar auch in seiner Amplitude – doch wesentlich weniger stark als das ursprüngliche Liouville-Feld, was es ermöglicht, damit zu arbeiten.

MIT FRDL. GEN. VON ADRIEN KASSEL, UMPA, ENS DE LYON

vollständig lösten. Sie lieferten die so genannte DOZZ-Formel, mit der sich jede Vorhersage für das Modell treffen lässt – aber das beeindruckende Ergebnis basierte nicht auf einer systematischen Herleitung der Dreipunkt-Korrelationsfunktion, sondern auf mehreren Annahmen, für die es keinen Beweis gab.

Das war vielen Fachleuten ein Dorn im Auge, weshalb sie sich bemühten, eine solide mathematische Basis für die DOZZ-Formel zu finden. Doch die Versuche verliefen im Sand. Anfang der 2010er Jahre schlossen sich Vargas, Kupiainen, Rhodes und David daher zusammen. Anstatt sich rein auf die Bootstrap-Methode zu stützen, wandten sie ihre Aufmerksamkeit wieder dem Feynman-Pfadintegral zu, das viele Fachleute für das Liouville-Feld nicht mehr berücksichtigten, nachdem Polyakov daran gescheitert war.

Die vier Mathematiker suchten nach einem Weg, das Pfadintegral für die stark wechselwirkende zweidimensionale Quantengravitationstheorie formal auszudrücken und die Bootstrap-Technik auf eine solide mathematische Basis zu stellen, um die DOZZ-Formel zu reproduzieren.

Wie Vargas, Kupiainen, Rhodes und David schnell feststellten, hatte der Wahrscheinlichkeitstheoretiker Jean-Pierre Kahane bereits Jahrzehnte zuvor den Schlüssel dazu entdeckt, jedoch ohne es zu wissen. In einem größtenteils in Vergessenheit geratenen Fachartikel entwickelte er probabilistische Methoden, um mit komplizierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu arbeiten.

Diese Ideen ermöglichte den Forschern, das Liouville-Feld in ein einfacheres Objekt umzuwandeln: ein so genanntes freies gaußsches Feld. Bei solchen Objekten schwanken die Längen der »Seeigel-Spitzen« nicht so stark wie beim ursprünglichen Feld. Dadurch wird es möglich, Durchschnittswerte und andere statistische Größen zu berechnen. Das war vorher nicht der Fall und verhinderte es, ein Feynman-Pfadintegral zu formulieren, das eine Art Mittelwert über die verschiedenen Geometrien bildet. 2014 stellten Vargas, Kupiainen, Rhodes und David eine verbesserte Version des Pfadintegrals für das zweidimensionale Quantengravitationsmodell vor. Damit hatten sie zudem einen der seltenen Fälle gefunden, in denen es möglich ist, ein Pfadintegral auf solide mathematische Art und Weise auszudrücken.

Anschließend versuchten die Forscher, die mysteriöse DOZZ-Formel mit dem neuen Werkzeug herzuleiten. Das erwies sich allerdings alles andere als einfach: Das Team benötigte mehrere Jahre, um das modifizierte Pfadintegral zu untersuchen und mit Polyakovs Bootstrap-Methode zu verbinden.

Die Bemühungen haben sich aber gelohnt. 2020 konnten Vargas, Kupiainen und Rhodes zusammen mit Colin Guillarmou zeigen, dass die von DOZZ getroffenen Annahmen tatsächlich korrekt sind und die von ihnen hergeleitete Formel die Liouville-Theorie wirklich löst.

Damit haben sie jeden Zweifel an der ursprünglichen Arbeit ausgeräumt. So erfolgreich sie mit ihrer Methode auch waren, ihr Ansatz lässt sich für andere Modelle höchstwahrscheinlich nicht anwenden. Denn in höheren Dimensionen sind selbst freie Quantenfelder unzähmbar und lassen sich nicht durch so etwas wie gaußsche Felder ausdrücken. Von einer Theorie der Quantengravitation, die unsere reale Welt beschreibt, ist man also immer noch weit entfernt.

Dennoch hat sich mit dem vollständigen Verständnis einer Quantenfeldtheorie eine Hoffnung von Mathematikerinnen und Mathematikern erfüllt: Die dabei entwickelten Techniken finden nun Anwendung in anderen Bereichen. Die Auswirkungen sind bereits in der Wahrscheinlichkeitstheorie zu spüren, wo Fachleute nun die zuvor fragwürdigen Formeln aus der Physik nutzen können, deren Funktionsweisen jetzt gesichert sind. Ermutigt durch die aktuellen Ergebnisse, konnten sie bereits physikalische Gleichungen verwenden, um zwei Probleme mit Zufallskurven zu lösen. ◂

QUELLEN

Ang, M. et al.: Integrability of SLE via conformal welding of random surfaces. ArXiv: 2104.09477, 2021

Ang, M. et al.: FZZ formula of boundary Liouville CFT via conformal welding. ArXiv:2104.09478, 2021

Guillarmou, C. et al.: Conformal bootstrap in Liouville theory. ArXiv: 2005.11530, 2020

Kupiainen, A. et al.: Integrability of Liouville theory: Proof of the DOZZ Formula. Annals of mathematics 191, 2020

Von »Spektrum der Wissenschaft« übersetzte und redigierte Fassung des Artikels »Mathematicians Prove 2D Version of Quantum Gravity Really Works« aus dem »Quanta Magazine«, einem inhaltlich unabhängigen Magazin der Simons Foundation, die sich die Verbreitung von Forschungsergebnissen aus Mathematik und den Naturwissenschaften zum Ziel gesetzt hat.